

Proposition de Stage (avr. 2017- sept. 2017) + Thèse (oct. 2017- oct. 2020)

Discipline du doctorat : Mathématiques – Spécialité : Sciences des Images et des Formes

Mesures de Minkowski généralisées pour la caractérisation géométrique texturale multi-échelle de structures spatiales aléatoires.

Lieu

Ecole Nationale Supérieure des Mines de Saint-Etienne (ENSM-SE)
158 cours Fauriel, CS 62362, 42023 Saint-Etienne Cedex 2, FRANCE

Financement

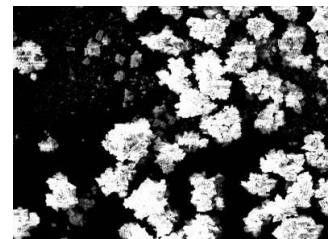
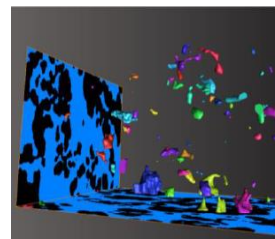
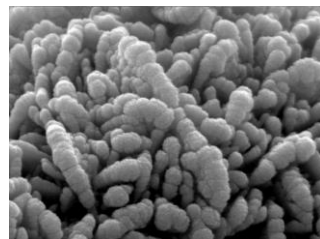
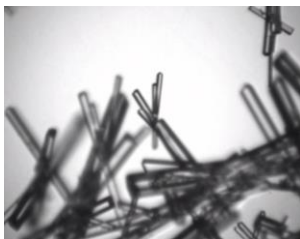
Stage : ~500€ net / mois ; Thèse : ~1600€ net / mois (allocation de recherche + monitorat d'enseignement)

Encadrement

Directeur de thèse : Prof. Jean-Charles Pinoli (ENSM-SE) - pinoli@emse.fr - <http://www.emse.fr/~pinoli/>
Co-Directeur de thèse : Prof. Johan Debayle (ENSM-SE) - debayle@emse.fr - <http://www.emse.fr/~debayle/>

Contexte général et particulier

De nombreux milieux naturels ou artificiels (fibreux, granulaires, poreux, cellulaires ...) présentent des structures spatiales complexes (voir figure ci-dessous) pour lesquelles beaucoup de physiciens (au sens large) des domaines concernés utilisent des descripteurs quantitatifs plus ou moins établis mathématiquement, comme : - la *rugosité* (pour quantifier les amplitudes des variations d'une surface aux petites échelles spatiales), - la *tortuosité* (pour quantifier les variations directionnelles d'une courbe ou d'une surface ayant beaucoup de « virages »), - la *granularité* (pour quantifier la distribution en taille des grains d'une population de particules), - la *porosité* (pour quantifier la distribution en taille des cavités dans un objet), - la *fractalité* (pour déterminer une dimension non-entière caractéristique d'un comportement fractionnaire invariant par similitude géométrique), ou - la *texturalité* (pour quantifier la disposition relative d'une structure spatiale).



Les approches géométriques (géométrie convexe, géométrie intégrale, géométrie différentielle) proposent des outils de caractérisation globale (fonctionnelles de Minkowski, volumes intrinsèques, courbures de Lipchitz-Killing) insuffisants, voire inadaptés, car applicables à des modèles trop simplistes assimilant une structure spatiale à une union localement finie - d'objets convexes, - d'objets à portée positive, ou - de variétés différentielles régulières.

La géométrie fractale s'est adressée aux structures spatiales complexes. Elle se concrétise principalement via le concept de dimension fractale qui s'applique à des structures spatiales déterministiquement ou probabilistiquement auto-similaires, ce qui en réduit fortement l'intérêt.

En théorie de la mesure géométrique, le concept de *lacunarité* s'est développé d'un point de vue théorique, et plus généralement et récemment celui des mesures de Minkowski généralisées. Un objet géométrique X dans \mathbb{R}^n (i.e. un ensemble topologiquement fermé) est alors caractérisé localement (d'où un aspect multi-échelle) par $n+1$ mesures de Minkowski généralisées appliquées sur l'objet X_ε parallèle à X situé à une distance strictement positive ε de X dont les comportements asymptotiques sont étudiés quand le paramètre d'échelle ε tend vers 0. Les descripteurs assurant la caractérisation géométrique de X sont alors les distributions probabilistes/statistiques des valeurs prises par les mesures de Minkowski généralisées sur X_ε . Une des mesures de Minkowski généralisées est la mesure de Descartes-Euler-Poincaré généralisée. En dimension 3, les trois autres densités fonctionnelles généralisées sont : la densité volumique, la densité périmétrique, la densité de l'intégrale de la courbure moyenne, Très peu de

publications traitent de ce sujet et restent avant tout à un niveau théorique.

La géométrie stochastique traite de la modélisation et de la caractérisation de structures spatiales aléatoires, mais aucun article publié ne traite de la lacunarité dans le cadre probabiliste.

Sujet de thèse et objectifs de la recherche

L'objet de cette thèse de doctorat en sciences est d'étudier et d'appliquer les mesures de Minkowski généralisées dans le cadre géométrique probabiliste, c'est-à-dire portant sur les ensembles fermés aléatoires.

Le doctorant devra étudier ces mesures d'un point de vue analytique et numérique, et en déterminera les propriétés en fonction du type de structures spatiales typiques considérées. Les modèles seront déterministes et stochastiques (par exemple, au moyen de schémas Booléens). Il mettra ensuite en place les simulations informatiques de ces modèles afin de valider les formules analytiques, asymptotiques et/ou approximantes. Enfin, il appliquera les mesures de Minkowski locales sur des structures spatiales réelles quantifiées par analyse d'image, et sélectionnées avec des collègues de l'ENS des Mines de Saint-Etienne.

Ainsi, le doctorant devra assurer les étapes suivantes :

- Bibliographie sur les approches géométriques classiques/modernes concernant les fonctionnelles de Minkowski, les courbures de Lipchitz-Killing et surtout les mesures de Minkowski généralisées.
- Etude des propriétés mathématiques des mesures Minkowski généralisées.
- Identification des modèles géométriques stochastiques de structures spatiales types les mieux appropriés.
- Simulation numérique de ces modèles.
- Etude analytique/asymptotique/approximante des mesures de Minkowski locales sur ces modèles.
- Application sur des structures spatiales réelles quantifiées par analyse d'image.

Verrous scientifiques

Le premier verrou scientifique (amont) est l'expression analytique des densités des mesures de Minkowski généralisées et la détermination de leurs comportements asymptotiques pour différentes structures spatiales aléatoires typiques.

Le second verrou scientifique (aval) est la mise en évidence de leurs relations avec les critères utilisés par les physiciens (fractalité, granularité, porosité, rugosité texturalité, tortuosité, etc.).

Coopération internationale

Prof. Dr. Martina Zähle (Jena, Germany), Prof. Jan Rataj (Praha, Czech Republic), Dr. Elena Villa (Milano, Italy), Dr. Steffen Winter (Karlsruhe, Germany).

Le doctorant effectuera un séjour de quelques mois durant sa thèse à l'Université de Milan dans le laboratoire du Professeur V. Capasso (Milano, Italy).

Bibliographie restreinte

- *Ahmad O. and Pinoli J.C., On the linear combination of the Gaussian and student's t random field and the integral geometry of its excursion sets. Statistics & Probability Letters, 83(2):559-567, 2013.*
- *Llorente M. and Winter S., A notion of Euler characteristic for fractals, Mathematische Nachrichten, Volume 280, Issue 1-2, pages 152–170, January 2007.*
- *Rataj J. and Zähle M., Curvatures and currents for unions of sets with positive reach II, Annals of Global Analysis and Geometry 20, no. 1, 1-21, 2001.*
- *Villa E., Mean densities and spherical contact distribution function of inhomogeneous Boolean models, Stoch Anal Appli, Vol. 28, pp. 480-504, 2010.*
- *Zähle Martina, Curvatures and currents for unions of sets with positive reach, Geometriae Dedicata 23, 155-171, 1987.*

Profil du candidat

Elève ingénieur ou étudiant en Master 2 recherche avec une spécialisation en analyse d'image et/ou mathématiques appliquées. Une bonne connaissance d'un langage de programmation informatique (Matlab, C++ ...) est nécessaire. Une bonne maîtrise de la langue anglaise est également importante.

Procédure de candidature

- Le candidat doit transmettre les éléments suivants :
 - Lettre de motivation
 - CV
 - Lettre(s) de référenceà Jean-Charles Pinoli (pinoli@emse.fr) et Johan Debayle (debayle@emse.fr).
- Date limite de candidature : 01 mars 2017